Série de préparation pour le camp d'été 2023 **Animée par : Chouihi.**

Théorème de Ménélaüs

Pour que les points M, N et P sur les droites respectives (BC), (AC) et (AB) du tringle ABC (et distincts des sommets) soient alignés il faut et il suffit que : $\boxed{\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1}$

Remarque : On appelle transversale du triangle ABC toute droite Δ coupant respectivement (BC), (AC) et (AB) en des points M, N et P distincts des sommets A, B et C.

Remarque : l'égalité du théorème prouve que si $M \in [BC]$ et $N \in [AC]$ alors $P \in [AB]$.

Exercice N°1:

Droite de Newton d'un quadrilatère complet

Un quadrilatère complet est la figure déterminée par quatre droites distinctes, sécantes deux à deux, l'intersection de trois quelconques d'entre elles étant vide. Trois d'entre elles déterminent un triangle ABC. La quatrième , Δ, coupe (BC), (AC) et (AB) en respectivement D, E et F.

*Les quatre droites (BC), (AC), (AB) et Δ sont dites côtés du quadrilatère complet (qui admet ainsi six sommets A, B, C, D, E et F)

*Les diagonales du quadrilatère complet sont les trois segments [AD], [BE] et [CF] non portés par les côtés, ayant pour extrémités deux sommets.

Soit M_1, M_2 et M_3 les milieux respectifs de [AD], [BE] et [CF]

1/ Soit A', E' et F' les milieux respectifs de [EF], [FA] et [AE]. Démontrer que :

a/ M_1, E' et F' sont alignés

b/ M_2, F' et A' sont alignés

c/ M_3, A' et E' sont alignés.

2/ Appliquer le théorème de Manélaus au triangle AEF, coupé par la transversale (DBC) et établir la relation : $\boxed{\frac{\overline{M_1F'}}{\overline{M_1E'}} \times \frac{\overline{M_3E'}}{\overline{M_3A'}} \times \frac{\overline{M_2A'}}{\overline{M_2F'}} = 1}$

3/ Conclure que : les milieux M_1, M_2 et M_3 des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés.

Théorème de Céva

Etant donné un triangle ABC et trois points M, N et P situés respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB).

Pour que les droites (AM), (BN) et (CP) soient concourantes ou parallèles il faut et il suffit que :

$\boxed{\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1}$

Triangles semblables

Deux triangles ABC et A'B'C' sont dits semblables si et seulement si l'une des propositions suivantes est réalisée :

- $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}, \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$
- $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

Théorème

Deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables si et seulement si l'une des propositions équivalentes suivantes est réalisées :

i. $\hat{A}' = \hat{A}$ et $\hat{B} = \hat{B}'$

ii. $\hat{A}' = \hat{A}$ et $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$

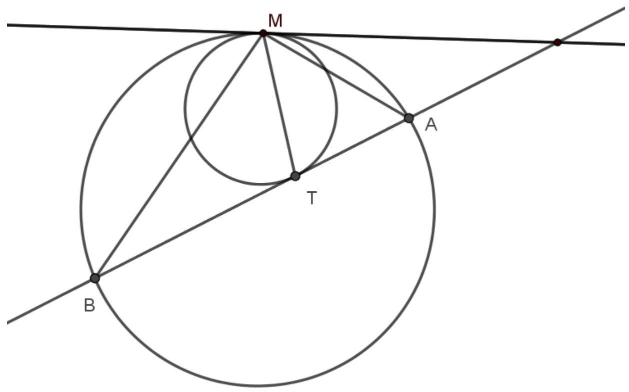
Exercice N°2 : [AC] et [DE] sont deux cordes sécants en un point B d'un cercle Γ.

Montrer que AB.BC = DB.BE

Exercice N°3

Deux cercles sont tangents intérieurement en M. [AB] est une corde du grand cercle tangente au petit cercle en T.

Montrer que (MT) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$.



Puissance d'un point par rapport à un cercle

Proposition : Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R, M un point du plan et D une droite passant par M et coupant $\mathscr{C}$ en deux points A et B. Alors le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ est égal à $OM^2 - R^2$ et par suite il ne dépend pas de la droite D. Ce nombre est **appelé puissance de M par rapport au cercle $\mathscr{C}$** et noté $\mathcal{P}_{\mathscr{C}}(M)$. On a ainsi : $\mathcal{P}_{\mathscr{C}}(M) = OM^2 - R^2$

Démonstration :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA}) = MO^2 - OA^2$

Où A' est le point diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathscr{C}$.

Ce nombre permet de situer le point M par rapport au cercle $\mathscr{C}$. Plus précisément :

* M est extérieur au cercle si et seulement si $\mathcal{P}_{\mathscr{C}}(M) > 0$
* M appartient au cercle si et seulement si $\mathcal{P}_{\mathscr{C}}(M) = 0$
* M est intérieur au cercle si et seulement si $\mathcal{P}_{\mathscr{C}}(M) < 0$

En particulier, si le point M est extérieur au cercle $\mathscr{C}$, on a : $\mathcal{P}_{\mathscr{C}}(M) = MT^2 = MT'^2$, où T et T′ sont les points de contact des deux tangentes menées par M au cercle $\mathscr{C}$.

Quadrangle inscriptible

<u>Définition</u> : Un quadrangle est une figure géométrique formée de quatre points (ou sommets) et de six droites les joignant deux à deux, ces droites devant être sécantes (deux à deux) en
trois points autres que les sommets.

Théorème : Pour qu'un quadrangle ABA'B' soit inscriptible il faut et il suffit que (AB) et (A'B') se coupent en M tel que
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA'}.\overrightarrow{MB'}$

Théorème :
Soit $\mathscr{C}$ un cercle circonscrit à un tringle ABA'.
$\mathscr{C}$ est tangent en A' à (MA') si et seulement si
$MA'^2 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

Axe radical de deux cercles

Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles distincts. L'ensemble des points du plan ayant même puissance par rapport à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ est :

- Vide si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont concentriques ;
- Une droite perpendiculaire à la droite des centres si leurs centres sont distincts.

Cette droite est alors appelée **<u>axe radical</u>** des deux cercles.
Dans le cas où les cercles sont sécants, leur axe radical est la droite passant par les deux points d'intersection de ces cercles. Dans le cas où ils sont tangents, leur axe radical est leur tangente commune.

Exercice N°4
On considère K et L deux points d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.
Soit A un point de la droite (KL) en dehors du cercle. On note P et Q les points de contact des tangentes à $\mathscr{C}$ issues de A.
Soit M le milieu de $[PQ]$. **Montrer que les angles $\widehat{MKO}$ et $\widehat{MLO}$ sont égaux.**

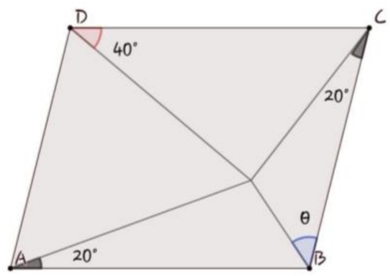
Exercice N°5
Soient Ω_1 et Ω_2 deux cercles qui se coupent en M et en N. Soit Δ la tangente commune aux deux cercles, qui est plus proche de M que de N. Δ est tangente à Ω_1 en A et Ω_2 en
B. La droite passant par M et parallèle à Δ rencontre Ω_1 en C et Ω_2 en D. Soient E l'intersection des droites (CA) et (BD), P le point d'intersection de droites (AN) et (CD) et Q le point d'intersection des droites (BN) et (CD).
Montrer que : EP = EQ.

Exercice N°6
Soit ABC un triangle isocèle vérifiant AB = AC.
Soient M le milieu de [BC] et O le point de la droite (AM) tel que (OB) soit orthogonale à (AB). Soient Q un point de]BC[, E un point de (AB) et F un point de (AC) tels que E, Q et F soient alignés.
Montrer que (OQ) est orthogonale `a (EF) si, et seulement si, QE = QF.

Exercice N°7
Trouver les triangles dont les longueurs des côtés sont des entiers naturels consécutifs et dont la mesure de l'un des angles est égale au double de la mesure d'un autre.

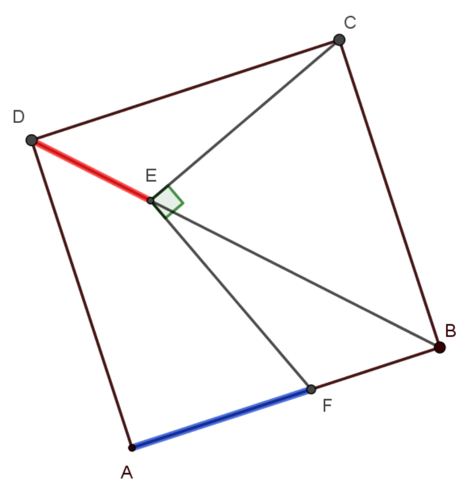
Exercice N°8
On considère un triangle ABC.
On place sur les côtés [BC], [CA] et [AB] respectivement les points K, L et M.
Montrer que l'un des triangles AML, BKM et CLK a pour aire une valeur inférieure ou égale à ¼ de celui du triangle ABC.

Exercice N°9



ABCD est un parallélogramme, trouver θ.

Exercice N°10



ABCD est un carré, DE = 1. Calculer AF.